ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Σεπτέμβριος 2013

ΘΕΜΑ 1: Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:
$\varphi(x,y,z) = (x+y+2kz,\ x+2ky+z,\ 2y+2z)$
Βρείτε όλα τα $k \in \mathbb{R}$ ώστε η διάσταση της εικόνας να είναι ίση με 2. Για τις τιμές του k που βρήκατε να υπολογιστούν τα ακόλουθα:
i) μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της απεικόνισης φ.
ii) ο πίνακας A της T στη βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$
iii) ο πίνακας B της T στη βάση $\{(-1,0,0),(1,-1,0),(1,1,-1)\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$
iv) Ένας αντιστρέψιμος 3x3 πίνακας P ώστε: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$
v) βρείτε τον αντίστροφο του P κάνοντας χρήση των στοιχειωδών πινάκων

ΘΕΜΑ 2: Να υπολογιστούν τα $r,t \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα:
$x - 4y + tz = r + t$
$tx + y + z = 4$
$x - y + z = r + 1$
i) να έχει μοναδική λύση
ii) να μην έχει λύση
iii) να έχει άπειρες λύσεις

ΘΕΜΑ 3: Να γραφούν οι ιδιότητες των οριζουσών και χρησιμοποιήστε τις ώστε να βρείτε έναν 4x4 πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία εκτός από ένα και ορίζουσα τον αριθμό μητρώου σας. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.

ΘΕΜΑ 4: Έστω V και W δύο διανυσματικοί πραγματικοί χώροι με διαστάσεις m και n αντιστοίχως και έστω η γραμμική απεικόνιση $T: V \to W$. Να δείξετε ότι υπάρχουν βάσεις α και β των V και W αντίστοιχα έτσι ώστε ο πίνακας της T από τη βάση α στη βάση β να είναι ο $n \times m$ πίνακας: $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Όπου r είναι η διάσταση της εικόνας, I_r ο μοναδιαίος $r \times r$ διάστασης πίνακας και 0 οι μηδενικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων

ΘΕΜΑ 5: Στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε έναν υπόχωρο του V ώστε:

$V = \{(x, y, z, w) \mid x + y + 2z + w = 0\}$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, έστω αυτός W έτσι ώστε: $V \cap W = \langle (0,3,1,1) \rangle$ και $V + W = \mathbb{R}^4$. Έπειτα να προσδιοριστούν οι βάσεις και διαστάσεις των V, W. Τέλος, να βρείτε έναν υπόχωρο V' τέτοιο ώστε: $V \oplus V' = \mathbb{R}^4$ και έναν υπόχωρο W' τέτοιο ώστε: $W \oplus W' = \mathbb{R}^4$